Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 46

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

16 de noviembre de 2020

1. Calcular $(\gamma^\mu p_\mu - mc)^{-1}$

La matriz[1] $\gamma^\mu p_\mu - mc$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} p_0 - mc & 0 & p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & p_0 - mc & p_1 + ip_2 & -p_3 \\ -p_3 & -p_1 + ip_2 & -p_0 - mc & 0 \\ -p_1 - ip_2 & p_3 & 0 & -p_0 - mc \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vamos a usar el método de eliminación de Gauss para calcular la inversa, primero ampliamos la matriz una matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} p_0 - mc & 0 & p_3 & p_1 - ip_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 - mc & p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_3 & -p_1 + ip_2 & -p_0 - mc & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p_1 - ip_2 & p_3 & 0 & -p_0 - mc & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora procedemos a reducir la matriz, primero queremos un 1 en la posición $(1,1)$ así que dividimos la primera fila por $p_0 - mc$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{p_3}{p_0-mc} & \frac{p_1-ip_2}{p_0-mc} & \frac{1}{p_0-mc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 - mc & p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_3 & -p_1 + ip_2 & -p_0 - mc & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p_1 - ip_2 & p_3 & 0 & -p_0 - mc & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora eliminamos toda la primera columna sumando $F_3 + p_3 F_1$ y $F_4 + (p_1 + ip_2)F_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{p_3}{p_0-mc} & \frac{p_1-ip_2}{p_0-mc} & \frac{1}{p_0-mc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 - mc & p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 + ip_2 & \frac{p_3^2-p_0^2+m^2c^2}{p_0-mc} & p_3\frac{p_1-ip_2}{p_0-mc} & \frac{p_3}{p_0-mc} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_3 & p_3\frac{p_1+ip_2}{p_0-mc} & \frac{p_1^2+p_2^2-p_0^2+m^2c^2}{p_0-mc} & \frac{p_1+ip_2}{p_0-mc} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Podemos usar que $p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ y reducir la segunda columna haciendo las transformaciones $\frac{F_2}{p_0-mc}$, $F_3 + (p_1 - ip_2)F_2$, $F_4 - p_3 F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{p_3}{p_0-mc} & \frac{p_1-ip_2}{p_0-mc} & \frac{1}{p_0-mc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p_1+ip_2}{p_0-mc} & -\frac{p_3}{p_0-mc} & 0 & \frac{1}{p_0-mc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2c^2-p^2}{p_0-mc} & 0 & \frac{p_3}{p_0-mc} & \frac{p_1-ip_2}{p_0-mc} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m^2c^2-p^2}{p_0-mc} & \frac{p_1+ip_2}{p_0-mc} & \frac{-p_3}{p_0-mc} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Notemos que no podemos sustituir $p^2 = m^2c^2$ o obtendríamos una matriz no invertible. Para reducir la tercera columna hacemos las transformaciones $\frac{p_0-mc}{m^2c^2-p^2}F_3$, $F_1 - \frac{p_3}{p_0-mc}F_3$, $F_2 - \frac{p_1+ip_2}{p_0-mc}F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{p_1-ip_2}{p_0-mc} & \frac{1}{p_0-mc}\left(\frac{p^2+p_3^2-m^2c^2}{p^2-m^2c^2}\right) & \frac{p_3}{p_0-mc}\frac{p_1-ip_2}{p^2-m^2c^2} & \frac{p_3}{p^2-m^2c^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{p_3}{p_0-mc} & \frac{p_1+ip_2}{p_0-mc}\frac{p_3}{p^2-m^2c^2} & \frac{1}{p_0-mc}\left(\frac{p_0^2-p_3^2-m^2c^2}{p^2-m^2c^2}\right) & \frac{p_1+ip_2}{p^2-m^2c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-p_3}{p^2-m^2c^2} & \frac{-p_1+ip_2}{p^2-m^2c^2} & \frac{mc-p_0}{p^2-m^2c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m^2c^2-p^2}{p_0-mc} & \frac{p_1+ip_2}{p_0-mc} & \frac{-p_3}{p_0-mc} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

[1] Voy a usar el cuadrivector p en lugar de k pues Javier se olvidó de la $\hbar$, así las ecuaciones son idénticas a las del vídeo.

Y finalmente hacemos lo mismo para la última columna con las transformaciones $\frac{p_0-mc}{m^2c^2-p^2}F_4$, $F_1 - \frac{p_1-ip_2}{p_0-mc}F_4$, $F_2 + \frac{p_3}{p_0-mc}F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_0+mc}{p^2-m^2c^2} & 0 & \frac{p_3}{p^2-m^2c^2} & \frac{p_1-ip_2}{p^2-m^2c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_0+mc}{p^2-m^2c^2} & \frac{p_1+ip_2}{p^2-m^2c^2} & \frac{-p_3}{p^2-m^2c^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-p_3}{p^2-m^2c^2} & \frac{-p_1+ip_2}{p^2-m^2c^2} & \frac{mc-p_0}{p^2-m^2c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p_1-ip_2}{p^2-m^2c^2} & \frac{p_3}{p^2-m^2c^2} & 0 & \frac{mc-p_0}{p^2-m^2c^2} \end{array}\right)$$

Por lo que la matriz inversa es

$$\frac{1}{p^2-m^2c^2}\begin{pmatrix} p_0+mc & 0 & p_3 & p_1-ip_2 \\ 0 & p_0+mc & p_1+ip_2 & -p_3 \\ -p_3 & -p_1+ip_2 & mc-p_0 & 0 \\ -p_1-ip_2 & p_3 & 0 & mc-p_0 \end{pmatrix} = \frac{p_\mu\gamma^\mu+mc}{p^2-m^2c^2}$$